Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Madrid 2022, Extraordinaria

mentoor.es

Ejercicio 1. Opción A. Álgebra

En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiráramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

Solución:

Definición de variables: Sean x el número de ensayos, y el número de novelas y z el número de biografías. El número total de libros es $T = x + y + z$.

Planteamiento de las ecuaciones:

Tres de cada dieciséis libros son ensayos:

$$\frac{x}{x+y+z} = \frac{3}{16} \implies 16x = 3(x+y+z) \implies 13x - 3y - 3z = 0$$

Biografías más un tercio de ensayos exceden en dos a las novelas:

$$z + \frac{x}{3} = y + 2 \implies 3z + x = 3y + 6 \implies x - 3y + 3z = 6$$

Al retirar la mitad de ensayos y la quinta parte de novelas quedan 105 libros:

$$(x+y+z) - \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}\right) = 105$$

Multiplicando por 10:

$$10(x+y+z) - (5x+2y) = 1050 \implies 10x + 10y + 10z - 5x - 2y = 1050 \implies 5x + 8y + 10z = 1050$$

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 13x - 3y - 3z = 0 \\ x - 3y + 3z = 6 \\ 5x + 8y + 10z = 1050 \end{cases}$$

Discusión del sistema (Teorema de Rouché-Frobenius):

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 13 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \\ 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

Calculamos $|A|$:

$$\begin{aligned} |A| &= 13(-30-24) - (-3)(10-15) + (-3)(8-(-15)) \\ &= 13(-54) + 3(-5) - 3(23) \\ &= -702 - 15 - 69 = -786 \end{aligned}$$

Como $|A| = -786 \neq 0$, $Rg(A) = 3$. El rango de la ampliada A^* también es 3. Como $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A^*) = 3$ (número de incógnitas), el sistema es **Compatible Determinado (S.C.D.)**.

Resolución por Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 6 & -3 & 3 \\ 1050 & 8 & 10 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0(-30-24) - (-3)(60-3150) + (-3)(48-(-3150))}{-786} = 24$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 0 & -3 \\ 1 & 6 & 3 \\ 5 & 1050 & 10 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{13(60-3150) - 0 + (-3)(1050-30)}{-786} = 55$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 6 \\ 5 & 8 & 1050 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{13(-3150-48) - (-3)(1050-30) + 0}{-786} = 49$$

En la estantería hay 24 ensayos, 55 novelas y 49 biografías.

Ejercicio 2. Opción A. Análisis

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x} & x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & x \geq 0 \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de $f(x)$ en R.
b) ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$? Justifique la respuesta.
c) Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.
d) Determine para $x \in (0, \infty)$ el punto de la gráfica de $f(x)$ en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto. En el punto obtenido, ¿alcanza $f(x)$ algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.

Solución:

a) Estudie la continuidad de $f(x)$ en R.

Continuidad por intervalos:
- Para $x < 0$, $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$. Continua en $(-\infty, 0)$.
- Para $x > 0$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Continua en $(0, \infty)$.

Continuidad en $x = 0$:
$f(0) = 3$.
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (2 + 1/x) = -\infty$.
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 - 4x + 3) = 3$.
Como el límite lateral izquierdo es infinito, la función no es continua en $x = 0$.

$$\boxed{f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R} - \{0\}. \text{ En } x = 0 \text{ presenta una discontinuidad infinita.}}$$

b) ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$? Justifique la respuesta.

No es derivable en $x = 0$ porque no es continua en $x = 0$.

$$\boxed{f(x) \text{ no es derivable en } x = 0 \text{ porque no es continua en } x = 0.}$$

c) Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.

Asíntotas Verticales:
En $x = 0$,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

Hay asíntota vertical en $x = 0$.

Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (2 + 1/x) = 2$$

.
Hay asíntota horizontal $y = 2$ cuando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (x^2 - 4x + 3) = +\infty$$

No hay asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

Asíntotas Oblicuas: No hay cuando $x \to -\infty$ (por haber horizontal).
Cuando $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x} = +\infty$$

No hay asíntota oblicua.

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Asíntota vertical en } \mathbf{x = 0.} \\ \textbf{Asíntota horizontal } \mathbf{y = 2} \textbf{ (cuando } \mathbf{x \to -\infty}\textbf{).} \end{array}}$$

d) Determine para $x \in (0, \infty)$ el punto... extremo relativo?

Para $x \in (0, \infty)$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
$f'(x) = 2x - 4$.
$f'(x) = 0 \implies x = 2$.
$f(2) = -1$. Punto $(2, -1)$.
Recta tangente en $(2, -1)$ es $y = -1$.

Clasificación del extremo:

$$f''(x) = 2 \implies f''(2) = 2 > 0 \implies$$

Hay un mínimo relativo en $x = 2$.

Tabla de monotonía en $(0, \infty)$*:*

Intervalo	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $f'(x)$	$-$	$+$
Comportamiento de $f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Punto: } \mathbf{(2, -1)}\textbf{. Recta tangente: } \mathbf{y = -1.} \\ \textbf{En } \mathbf{(2, -1)} \textbf{ hay un mínimo relativo.} \end{array}}$$

Ejercicio 3. Opción A. Geometría

Sean el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos $A(0,-1,0)$ y $B(0,1,0)$ pertenecientes al plano π.

a) **Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices $\{A, B, C, D\}$ que se encuentra en el plano π, encuentre los posibles puntos C y D.**

b) **Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π, determine los otros dos vértices del mismo.**

Solución:

a) **Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices $\{A, B, C, D\}$ que se encuentra en el plano π, encuentre los posibles puntos C y D.**

El plano $\pi \equiv x - z = 0$. Vector normal $\vec{n} = (1, 0, -1)$.
Puntos $A(0,-1,0)$ y $B(0,1,0)$ están en π.

Vector del lado conocido: $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0)$. Longitud $L = 2$.

Determinación del vértice D: Sea $D = (x_D, y_D, z_D)$.

Condición 1:

$$D \in \pi \implies z_D = x_D$$

Así $D = (x_D, y_D, x_D)$.

Condición 2:

$$\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$$

.
Vector $\overrightarrow{AD} = (x_D, y_D + 1, x_D)$.
$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 2(y_D + 1) = 0 \implies y_D = -1$. Así $D = (x_D, -1, x_D)$.

Condición 3:

$$|\overrightarrow{AD}| = L = 2$$

$$|\overrightarrow{AD}|^2 = x_D^2 + 0^2 + x_D^2 = 2x_D^2 = 4 \implies x_D = \pm\sqrt{2}$$

Cálculo de los vértices C y D:
Posibilidad 1: $D_1 = (\sqrt{2}, -1, \sqrt{2})$. $\overrightarrow{AD_1} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$. $C_1 = B + \overrightarrow{AD_1} = (0,1,0) + (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) = (\sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$.

Posibilidad 2: $D_2 = (-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2})$. $\overrightarrow{AD_2} = (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$. $C_2 = B + \overrightarrow{AD_2} = (0,1,0) + (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) = (-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2})$.

Solución 1: $C(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}), D(\sqrt{2}, -1, \sqrt{2})$
Solución 2: $C(-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2}), D(-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2})$

b) **Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π, determine los otros dos vértices del mismo.**

Centro del cuadrado:

$$M = \frac{A + B}{2} = (0, 0, 0)$$

Determinación de los otros vértices C y D:
Semidiagonal $\overrightarrow{MA} = (0, -1, 0)$,
Longitud $|\overrightarrow{MA}| = 1$.

$\overrightarrow{MC}$ debe ser perpendicular a $\overrightarrow{MA}$ y estar en π.

$C = (x_C, y_C, x_C)$. $\overrightarrow{MC} = (x_C, y_C, x_C)$.

$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = -y_C = 0 \implies y_C = 0$. Así $C = (x_C, 0, x_C)$.

$|\overrightarrow{MC}|^2 = |\overrightarrow{MA}|^2 \implies 2x_C^2 = 1^2 \implies x_C = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Los vértices C y D:
$C = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y
$D = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

$$\boxed{\textbf{Los otros dos vértices son } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \textbf{ y } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

Ejercicio 4. Opción A. Probabilidad

En una comunidad autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura de Matemáticas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato. Se pide:

a) **Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II.**
b) **Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en Matemáticas II.**
c) **Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución binomial mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en Matemáticas II.**

Solución:

a) **Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II.**

Sea $p = P(\text{Matriculado en MII}) = 3/5 = 0.6$. $q = 1 - p = 0.4$.
$n = 6$. $X \sim B(6, 0.6)$.

$$P(X = 4) = \binom{6}{4}(0.6)^4(0.4)^2 = 15 \cdot (0.1296) \cdot (0.16) = 0.31104$$

$$\boxed{\mathbf{P(X = 4) = 0.31104}}$$

b) **Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en Matemáticas II.**

$n = 6$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{6}{0}(0.6)^0(0.4)^6 = 1 - (0.4)^6 = 1 - 0.004096 = 0.995904$$

$$\boxed{\mathbf{P(X \geq 1) = 0.995904}}$$

c) **Aproximando por normal, probabilidad de que más de 60 de 120 alumnos estén matriculados.**

$N = 120$. $Y \sim B(120, 0.6)$.
Aproximar por $Y' \sim N(\mu, \sigma^2)$.
$\mu = Np = 120 \times 0.6 = 72$.
$\sigma^2 = Npq = 120 \times 0.6 \times 0.4 = 28.8$. $\sigma \approx 5.3666$.
Condiciones $Np > 5, Nq > 5$ se cumplen. $Y' \sim N(72, 28.8)$.
$P(Y > 60) \approx P(Y' \geq 60.5)$.
Estandarizar: $Z = \frac{Y'-\mu}{\sigma}$. $P(Y' \geq 60.5) = P(Z \geq \frac{60.5-72}{5.3666}) \approx P(Z \geq -2.14)$.
$P(Z \geq -2.14) = P(Z \leq 2.14) = 0.9838$.

$$\boxed{\mathbf{P(Y > 60) \approx 0.9838}}$$

Ejercicio 1. Opción B. Álgebra

Se consideran las matrices reales

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

a) **Calcule para qué valores del parámetro k tiene inversa la matriz AB. Calcule la matriz inversa de AB para $\boldsymbol{k = 1}$.**
b) **Calcule BA y discuta su rango en función del valor del parámetro real k.**
c) **En el caso $\boldsymbol{k = 1}$ escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea BA.**

Solución:

a) **Calcule para qué valores del parámetro k tiene inversa la matriz AB. Calcule la matriz inversa de AB para $\boldsymbol{k = 1}$.**

$$AB = \begin{pmatrix} k & 2 \\ k & k-1 \end{pmatrix}$$

$|AB| = k(k-3)$
Tiene inversa si $k \neq 0$ y $k \neq 3$.
Para $k = 1$: $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $|AB| = -2$. $(AB)^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{AB tiene inversa si } \boldsymbol{k \in \mathbb{R} - \{0, 3\}}. \\ \textbf{Para } \boldsymbol{k = 1}\textbf{, } \boldsymbol{(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}} \end{array}}$$

b) **Calcule BA y discuta su rango en función de k.**

$$BA = \begin{pmatrix} 1+k & 0 & k-1 \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

$|BA| = 0$ para todo k. $\text{Rg}(BA) < 3$.
Menor $\begin{vmatrix} -2 & k+1 \\ -1 & k \end{vmatrix} = -k + 1$.
Si $k \neq 1$, menor no nulo $\implies \text{Rg}(BA) = 2$.
Si $k = 1$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies \text{Rg}(BA) = 2$.

$$\boxed{\textbf{Rg(BA) = 2 para todo k} \in \mathbb{R}\textbf{.}}$$

c) En el caso $k = 1$ escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea BA.

Para $k = 1$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. $\text{Rg}(BA) = 2$.
Buscamos $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ tal que $\text{Rg}(BA|\vec{c}) = 3$.
La relación entre filas es $F_3 = \frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{2}F_2$. Para que sea incompatible, $c_3 \neq \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2$.
Elegimos $c_1 = 2, c_2 = 0$. $\frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(0) = 1$.
Tomamos $c_3 = 0 \neq 1$.
El sistema incompatible es:

$$\begin{cases} 2x = 2 \\ -2y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\textbf{Un sistema incompatible es: } \begin{cases} \boldsymbol{2x = 2} \\ \boldsymbol{-2y + 2z = 0} \\ \boldsymbol{x - y + z = 0} \end{cases}}$$

Ejercicio 2. Opción B. Análisis

Sea la función

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\leq 0 \\ x\ln(x) & \text{si } x>0 \end{cases}}$$

a) **Estudie la continuidad y la derivabilidad de $\boldsymbol{f(x)}$ en $\boldsymbol{x=0}$.**
b) **Estudie los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $\boldsymbol{f(x)}$, así como los máximos y mínimos relativos.**
c) **Calcule $\boldsymbol{\int_1^2 f(x)dx}$.**

Solución:

a) **Estudie la continuidad y la derivabilidad de $\boldsymbol{f(x)}$ en $\boldsymbol{x=0}$.**

Continuidad:
Dentro de las dos ramas la función es continua. Veamos qué ocurre en x = 0:
$f(0)=0$. $\lim_{x\to 0^-} x=0$.
$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)=0$.
Es continua.

Derivabilidad:

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & x<0 \\ \ln(x)+1 & x>0 \end{cases}$$

$f'(0^-)=1$. $f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}(\ln x+1)=-\infty$.
No es derivable en x=0.

$$\boxed{f(x) \textbf{ es continua en } x=0 \textbf{ pero no es derivable en } x=0.}$$

b) **Estudie los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $\boldsymbol{f(x)}$, así como los máximos y mínimos relativos.**

Tabla de monotonía:

Intervalo	$(-\infty,0)$	$(0,1/e)$	$(1/e,\infty)$
Signo de $\boldsymbol{f'(x)}$	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de $\boldsymbol{f(x)}$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Extremos relativos:
Máximo relativo en $(0,f(0))=(0,0)$.
Mínimo relativo en $(1/e,f(1/e))=(1/e,-1/e)$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Creciente en } \boldsymbol{(-\infty,0)\cup(1/e,\infty)}\textbf{. Decreciente en } \boldsymbol{(0,1/e)}. \\ \textbf{Máximo relativo en } \boldsymbol{(0,0)}\textbf{. Mínimo relativo en } \boldsymbol{(1/e,-1/e)}.\end{array}}$$

c) **Calcule $\boldsymbol{\int_1^2 f(x)dx}$.**

En $[1,2]$, $f(x)=x\ln(x)$.
Primitiva (por partes): $\int x\ln(x)dx=\frac{x^2\ln(x)}{2}-\frac{x^2}{4}$.

Regla de Barrow:

$$\int_1^2 x\ln(x)dx = \left[\frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = (2\ln 2 - 1) - (0 - 1/4) = 2\ln 2 - 3/4.$$

$$\boxed{\boldsymbol{\int_1^2 f(x)dx = 2\ln(2) - \frac{3}{4}}}$$

Ejercicio 3. Opción B. Geometría

Sean las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 5+2t, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

a) Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcule la distancia entre ellas.
b) Determine una ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.
c) Sean P y Q los puntos de las rectas r y s, respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación $z=0$. Calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

Solución:

a) Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcule la distancia entre ellas.

Puntos y vectores:
Recta s: $P_s = (2,5,0)$, $\vec{d_s} = (-2,2,1)$. Recta r: $z=\lambda \implies y = 2\lambda - 1 \implies x = -(2\lambda-1)-2 = -2\lambda-1$.
$P_r = (-1,-1,0)$, $\vec{d_r} = (-2,2,1)$.

Posición relativa: $\vec{d_r} = \vec{d_s}$.
Paralelas o coincidentes.
¿$P_s \in r$? $2 = -1-2\lambda \implies \lambda = -3/2$. $5 = -1+2\lambda \implies \lambda = 3$. $0 = \lambda$. No coinciden. Son paralelas distintas.

Distancia:

$$d(r,s) = d(P_s, r) = \frac{|\overrightarrow{P_rP_s} \times \vec{d_r}|}{|\vec{d_r}|}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (3,6,0)$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} \times \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (6,-3,18)$$

$$|\overrightarrow{P_rP_s} \times \vec{d_r}| = \sqrt{36+9+324} = \sqrt{369}$$

$$|\vec{d_r}| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$d(r,s) = \sqrt{369}/3 = 3\sqrt{41}/3 = \sqrt{41}$$

$$\boxed{\textbf{Las rectas son paralelas y distintas. La distancia es } \sqrt{41} \textbf{ u.}}$$

b) Determine una ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

El plano π' contiene $P_r(-1,-1,0)$ y los vectores $\vec{d_r} = (-2,2,1)$ y $\overrightarrow{P_rP_s} = (3,6,0)$. $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} =$

$0 \ (x+1)(-6) - (y+1)(-3) + z(-12-6) = 0 \implies -6x - 6 + 3y + 3 - 18z = 0$. $-6x + 3y - 18z - 3 = 0 \implies 2x - y + 6z + 1 = 0$.

$\boxed{\textbf{El plano es } \boldsymbol{\pi' : 2x - y + 6z + 1 = 0}.}$

c) ...recta que pasa por los puntos P y Q.

Punto P: $P \in r$ y $z = 0$. $\lambda = 0 \implies P(-1,-1,0)$. Punto Q: $Q \in s$ y $z = 0$. $t = 0 \implies Q(2,5,0)$. Recta t pasa por P y Q. Vector director $\overrightarrow{PQ} = (3,6,0)$. Simplificado $\vec{v_t} = (1,2,0)$. Ecuación paramétrica (usando Q):

$$t \equiv \begin{cases} x = 2 + \delta \\ y = 5 + 2\delta \\ z = 0 \end{cases} \quad , \quad \delta \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\textbf{La recta es } \boldsymbol{t : (x,y,z) = (2+\delta, 5+2\delta, 0)}.}$

Ejercicio 4. Opción B. Probabilidad

Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B y C. Cuatro de cada siete productos son de tipo A, dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C. A la exportación se destina un 40% de los productos tipo A, un 60% de los productos tipo B y un 20% de los productos tipo C. Elegido un producto al azar, se pide:

a) **Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.**
b) **Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.**

Solución:

Definición de sucesos: A, B, C: Producto tipo A, B, C. E: Producto exportado.

Probabilidades: $P(A) = 4/7, P(B) = 2/7, P(C) = 1/7$. $P(E|A) = 0.4, P(E|B) = 0.6, P(E|C) = 0.2$.

a) **Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.** Teorema Probabilidad Total:

$$P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C)$$

$$P(E) = (0.4)(4/7) + (0.6)(2/7) + (0.2)(1/7)$$

$$P(E) = 1.6/7 + 1.2/7 + 0.2/7 = 3.0/7 = 3/7$$

$$\boxed{\mathbf{P(E) = \frac{3}{7}}}$$

b) **Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.** Buscamos $P(C|E)$. Teorema de Bayes:

$$P(C|E) = \frac{P(E|C)P(C)}{P(E)}$$

$$P(C|E) = \frac{(0.2)(1/7)}{3/7} = \frac{0.2/7}{3/7} = \frac{0.2}{3} = \frac{2/10}{3} = \frac{1/5}{3} = 1/15$$

$$\boxed{\mathbf{P(C|E) = \frac{1}{15}}}$$